







## Sincronización de sistemas caóticos de múltiple enrollamiento mediante observador de estado extendido

### Synchronization of multi-scroll chaotic systems based in extended state observer

C. Aldrete-Maldonado <sup>a</sup>, P. J. Prieto <sup>b</sup>, C. Plata-Ante <sup>a</sup>, L. Trujillo <sup>a</sup>, O. García-Alarcón <sup>c</sup>, R. Ramírez-Villalobos <sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Tecnológico Nacional de México / IT de Tijuana, 22414, Tijuana, Baja California, México.

<sup>b</sup>Escuela de Ingeniería, CETYS Universidad, 22210, Tijuana, Baja California, México.

<sup>c</sup>Departamento de Ingeniería Mecatrónica, Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico Superior de Xalapa, 91096, Xalapa, Veracruz, México.

#### Resumen

Este artículo presenta el diseño de un observador para resolver el problema de sincronización de sistemas caóticos de múltiple enrollamiento. La propuesta consiste en el diseño de un observador de estado extendido para estimar las variable no medible, así como, la no linealidad que genera el múltiple enrollamiento en la dinámica del sistema caótico. Además, se presenta un análisis de estabilidad bajos los criterios de Lyapunov para demostrar que las soluciones se mantienen acotadas de manera uniforme. Finalmente, se muestran resultados de simulación para ilustrar la efectividad del observador propuesto.

*Palabras Clave:* Observador, sincronización, sistema caótico de múltiple enrollamiento.

#### Abstract

This article describes the design of an extended state observer (ESO) in order to solve the synchronization problem of chaotic multi-scroll systems. In this proposal, ESO estimates the non-measurable state variable, as well as the non-linearity that generate the multiple scrolls in the chaotic systems. In addition, Lyapunov criteria is presented in order to demonstrate that solutions are uniformly bounded. Finally, simulation results are shown to illustrate the effectiveness of the proposed observer.

*Keywords:* Multi-scroll chaotic system, observer, synchronization.

## 1. Introducción

Los sistemas caóticos son osciladores aperiódicos no lineales que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales. En 1963, Edward N. Lorenz desarrolló el primer sistema de ecuaciones diferenciales de tercer orden que presentaba una dinámica caótica. Él se dio cuenta que cualquier variación en las condiciones iniciales afectaba las condiciones finales (Lorenz, 1963). Posteriormente, en 1979, Otto RöSSLer propone el primer sistema hipercaótico. Este sistema consiste en una ecuación diferencial de cuarto orden (Rossler, 1979). A diferencia de los sistemas caóticos, este tipo de sistemas presentan un comportamiento más complejo, es decir, tiene un atractor más complejo (Yujun *et al.*, 2010). Décadas después, Sprott presentó un conjunto de sistemas caóticos, representados por una ecuación diferencial de tercer orden, que tienen dos o tres términos no li-

neales (Sprott, 1994). Derivado de lo anterior, en años recientes, se ha reportado el desarrollo de modelos caóticos que presentan atractores con formas más complejas, es decir, con sistemas caóticos cuyos atractores se expanden en una o más direcciones (Wang y Xiao, 2020). En este sentido, los sistemas caóticos pueden ser categorizados en sistemas con múltiples alas y sistemas con múltiples enrollamientos. La diferencia entre éstos sistemas es que los primeros contienen productos de sus variables de estado como términos no lineales mientras que los sistemas de múltiple enrollamiento no contiene productos de sus variables de estado (Zhang y Wang, 2019).

En este marco de referencia, en los últimos años ha habido un gran interés por parte de la comunidad científica en la generación de modelos caóticos con múltiples enrollamientos. De manera general, este tipo de sistemas están modelados por una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden (Liu *et al.*,

\*Autor para correspondencia: ramon.ramirez@tectijuana.edu.mx

**Correo electrónico:** christian.aldrete18@tectijuana.edu.mx (Christian Aldrete Maldonado), pablo.prieto@cetys.mx (Pablo José Priet Entenza), corina.plata@tectijuana.edu.mx (Corina Plata-Ante), leonardo.trujillo@tectijuana.edu.mx (Leonardo Trujillo Reyes), octavio.garcia@itsx.edu.mx, ramon.ramirez@tectijuana.edu.mx (Ramón Ramírez-Villalobos).

2020). Como se menciona anteriormente, este tipo de sistemas no contiene productos de sus variables de estado en el modelo, es decir, estos presentan una función no lineal que genera los enrollamientos. En la literatura se ha reportado modelos caóticos de múltiple enrollamiento con un término no lineal conformado por funciones lineales por partes (PWL, por su sigla en inglés “*piecewise linear*”) (Carbajal-Gómez y Sánchez-López, 2019; Tlelo-Cuautle et al., 2015), por formas especiales de una función seno (SFSF, por su sigla en inglés *special form of a sine function*), funciones hiperbólicas (Chen et al., 2017; Signing et al., 2019), entre otras, (Ding y Feng, 2020; Li y Zeng, 2023).

Dadas las características de los sistemas caóticos de múltiple enrollamiento, estos son utilizados como sistemas de encriptamiento en diversas áreas de las ciencias e ingeniería (por ejemplo, biomedicina, comunicaciones seguras) (Bonny et al., 2023; Pérez-Cruz et al., 2017). En este marco de referencia, la seguridad es un indicador importante para medir el rendimiento del esquema de comunicación y un sistema de sincronización caótica puede proporcionar características para mejorar la confiabilidad de los esquemas de comunicaciones seguras (Li y Yue, 2020). En este contexto, la sincronización es un proceso en el que dos sistemas convergen a la misma dinámica. Para lograr lo anterior, el esquema maestro-esclavo es el enfoque más utilizado (Zambrano-Serrano et al., 2021). En este caso, el sistema con dinámica caótica es considerado como sistema maestro mientras que el sistema, que es forzado a seguir el sistema maestro, es llamado esclavo. Respecto a la sincronización, Pecora y Carroll fueron los pioneros (Pecora y Carroll, 1990). El problema de sincronización es similar al diseño de observadores para sistemas no lineales (Nijmeijer y Mareels, 1997; Sira-Ramírez y Cruz-Hernández, 2001). En años recientes, se han diseñados observadores para sistemas caóticos con múltiples enrollamientos utilizando diferentes metodologías: formas hamiltonianas (Gámez-Guzmán et al., 2009), modos deslizantes (Plata et al., 2020), entre otras. Cabe resaltar que en aplicaciones como la telemedicina, un factor importante es la sincronización robusta entre el sistema maestro y el esclavo, es decir, se busca una sincronización considerando que el sistema maestro presenta variaciones paramétricas, variables de estados desconocidas y/o incertidumbres en el modelo (Kekha Javan et al., 2022; Roldán-Caballero et al., 2023). Ésto con la finalidad de incrementar la seguridad en el encriptamiento de información de los pacientes (Abundiz-Pérez et al., 2016; Murillo-Escobar et al., 2017).

Motivado por lo anterior, en este artículo se presenta un esquema maestro-esclavo basado en un observador para resolver el problema de sincronización de sistemas caóticos de múltiple enrollamiento. El algoritmo propuesto considera al sistema caótico de múltiple enrollamiento como maestro. Por otro lado, para brindar robustez al esquema de sincronización, un observador extendido es considerado como sistema esclavo para estimar todos los estados del sistema maestro y la no linealidad que genera los múltiples enrollamientos. Es decir, el término no lineal se considera como una función desconocida. Así, en un esquema de encriptamiento, el usuario podrá ajustar los parámetros del término no lineal de manera arbitraria y el observador estimará la no linealidad sin necesidad de conocer dicha información.

El presente artículo está organizado de la siguiente mane-

ra: en la Sección 2 se presenta el modelo general de un sistema caótico de múltiple enrollamiento. En la Sección 3 se muestra el diseño del observador de estado extendido y el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. En la Sección 4 se presenta simulaciones numéricas considerando como ejemplo un sistema caótico que presenta una forma especial de una función seno como no linealidad. Finalmente, en la Sección 5 se presentan las conclusiones de esta investigación.

## 2. Planteamiento del problema

Considere el sistema caótico de múltiple enrollamiento

$$\ddot{x} + c\dot{x} + b\dot{x} + ax = d_1 f(x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (1)$$

donde  $f(\cdot)$  representa el término no lineal que genera los múltiples enrollamientos y  $\{a, b, c, d_1\} \in \mathbb{R}$ . Definiendo  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}(t)$ ,  $x_3(t) = \ddot{x}(t)$ , el sistema (1) puede ser representado por la siguiente forma canónica:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (2b)$$

$$\dot{x}_3 = -ax_1 - bx_2 - cx_3 + d_1 f(x_1, x_2, x_3). \quad (2c)$$

Se reescribe el sistema (2) con la siguiente representación en espacio de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3b)$$

$$\dot{x}_3 = -ax_1 - bx_2 - cx_3 + x_4 \quad (3c)$$

$$\dot{x}_4 = \varphi(t) \quad (3d)$$

donde el término no lineal  $d_1 f(\cdot)$  en (2) es considerado como un estado extendido, es decir,  $\dot{x}_4 = \varphi(t)$ . En la siguiente sección se describe el diseño del observador de estado extendido para el sistema (3).

## 3. Sincronización

El observador de estado extendido está definido de la siguiente manera:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + l_1(y - \hat{x}_1) \quad (4a)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + l_2(y - \hat{x}_1) \quad (4b)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = -a\hat{x}_1 - b\hat{x}_2 - c\hat{x}_3 + \hat{x}_4 + l_3(y - \hat{x}_1) \quad (4c)$$

$$\dot{\hat{x}}_4 = l_4(y - \hat{x}_1) \quad (4d)$$

$$y = x_1 \quad (4e)$$

donde  $\hat{x}_i(t)$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) representa la estimación de las variables de estado  $x_i(t)$ . En el diseño del observador se considera  $y = x_1$  como la salida medible del sistema (3). Al definir el vector del error de observación como  $\tilde{x} \triangleq [x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_4 - \hat{x}_4]^T$ , la dinámica del error queda definida como sigue:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - B\varphi(t) - L(y - C\tilde{x}) \quad (5)$$

with

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C \triangleq [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad L \triangleq [l_1, l_2, l_3, l_4]^T.$$

### 3.1. Análisis de estabilidad

Para el análisis de estabilidad, se asume lo siguiente:

- (S1) Las soluciones del sistema (2) se mantienen acotadas de manera uniforme para  $t \in [0, \infty)$ .
- (S2) El escalar  $\varphi(t)$  en (5) es una función desconocida pero con cota superior conocida, es decir, existe una constante  $\varphi^+ > 0$  tal que:

$$|\varphi(t)| \leq \varphi^+. \quad (6)$$

El análisis de estabilidad considera la función de Lyapunov  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$  para el dinámica del error definida en (5). Aquí,  $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es una matriz simétrica y definida positiva. La derivada temporal de  $\dot{V}(\bar{x})$  a lo largo de las trayectorias de (5) está dada por:

$$\dot{V}(\bar{x}) = \bar{x}^T (P(A - LC) + (A - LC)^T P) \bar{x} - 2\bar{x}^T PB\varphi(t). \quad (7)$$

Ahora,  $\dot{V}(\bar{x})$  puede reescribirse como:

$$\dot{V}(\bar{x}) = -\bar{x}^T Q \bar{x} - 2\bar{x}^T PB\varphi(t). \quad (8)$$

Si la matrix  $P$  se selecciona tal que se satisface las siguiente ecuación de Lyapunov:

$$P(A - LC) + (A - LC)^T P = -Q, \quad (9)$$

para cualquier matriz  $Q$  simétrica y definida positiva. Entonces, bajo la suposición (S2), la derivada de la candidata de Lyapunov  $\dot{V}(\bar{x})$  es reducida a la siguiente desigualdad:

$$\dot{V}(\bar{x}) \leq -(\lambda_{\min}\{Q\} \|\bar{x}\| - 2\varphi^+ \lambda_{\max}\{P\}) \|\bar{x}\|. \quad (10)$$

Así,  $\dot{V}(\bar{x})$  es una función definida negativa para toda  $\bar{x}$  fuera del conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \bar{x} : \|\bar{x}\| > \frac{2\varphi^+ \lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{Q\}} \right\}. \quad (11)$$

Por lo tanto, las trayectorias de (5) son acotadas de manera uniforme. Por lo tanto, las soluciones del observador (4) se van a encontrar acotadas alrededor de las soluciones del sistema caótico (2).

## 4. Simulaciones numéricas

Para ilustrar la efectividad del observador propuesto, en esta sección se considera el siguiente sistema de múltiples enrollamientos (Ding y Feng, 2020):

$$\dot{x}_1 = 10x_2 \quad (12a)$$

$$\dot{x}_2 = 10x_3 \quad (12b)$$

$$\dot{x}_3 = 10(-ax_2 - cx_3 - d_1 f(x_1)) \quad (12c)$$

con el término no lineal  $f(x_1)$  está definido como:

$$f(x_1) \triangleq \begin{cases} -\sin(2\pi b x_1) & -\frac{k_n}{b} \leq x_1 \leq \frac{k_p}{b} \\ +\sin(2\pi b x_1) & \frac{k_p}{b} < x_1 \\ +\sin(2\pi b x_1) & -\frac{k_n}{b} > x_1 \end{cases} \quad (13)$$

donde  $\{a, c, d_1\} \in \mathbb{R}$  y  $\{k_n, k_p\} \in \mathbb{N}^+$ . En (12), el número de enrollamientos y el tamaño del atractor puede ser modificado arbitrariamente mediante una sintonización de los parámetros en  $f(x_1)$ . El sistema (12) tiene las siguientes características:

- (i) Puede presentar una dinámica caótica, cíclica o estable.
- (ii) Con una sintonización de los parámetros  $k_n$  y  $k_p$ , se puede generar un atractor caóticos con múltiples enrollamientos. El número de enrollamientos puede ser distribuido en el lado derecho y/o izquierdo del plano de fase  $(x_1, x_2)$ .

Para fines de estudio, se considera las dinámicas caóticas y cíclicas en esta sección. Los valores de parámetros para cada caso se describen en la Tabla 1 y las respectivas dinámicas se muestran en la Figura 1.

Tabla 1: Valores de parámetros para diferentes dinámicas.

Parámetro	Dinámica			
	Cíclico	Caótico	Caótico	Caótico
$a$	0.3	0.3	0.3	0.3
$b$	0.25	0.25	0.25	0.25
$c$	0.3	0.3	0.3	0.3
$d$	0.12	0.35	0.35	0.35
$k_n$	3	2	3	3
$k_p$	3	2	3	2

En la Figura 1(a) se puede observar que el sistema (12) presenta una dinámica cíclica. Las Figuras 1(b) y 1(c) muestran que el sistema tiene una dinámica caótica. En este caso, se observa que el número de enrollamientos esta distribuido equitativamente en ambos lados del plano de fase  $(x_1, x_2)$ . Por otro lado, en la Figura 1(d) se observa que en lado izquierdo del plano de fase  $(x_1, x_2)$  hay más enrollamientos que en lado derecho.

Para el diseño del observador se considera como estado extendido el término no lineal (13), por lo tanto, el observador se define como

$$\hat{x}_1 = 10(\hat{x}_2 + l_1(y - \hat{x}_1)) \quad (14a)$$

$$\hat{x}_2 = 10(\hat{x}_3 + l_2(y - \hat{x}_1)) \quad (14b)$$

$$\hat{x}_3 = 10(-a\hat{x}_1 - c\hat{x}_3 + \hat{x}_4 + l_3(y - \hat{x}_1)) \quad (14c)$$

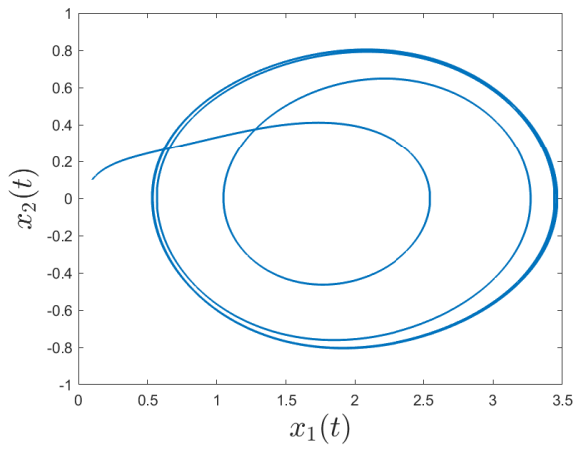
$$\hat{x}_4 = 10l_4(y - \hat{x}_1) \quad (14d)$$

$$y = x_1 \quad (14e)$$

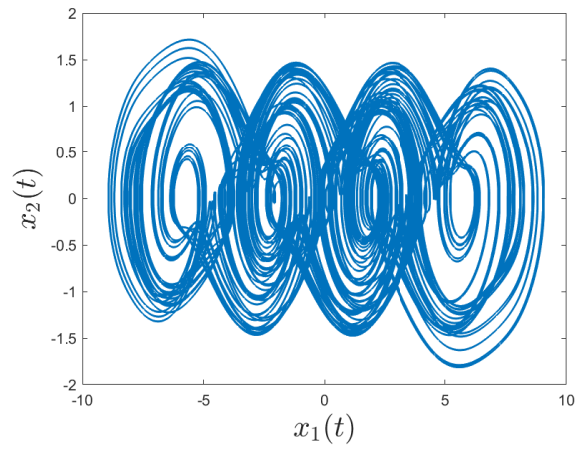
y la dinámica del error queda representada de la forma (5) con:

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ -10a & 0 & -10c & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

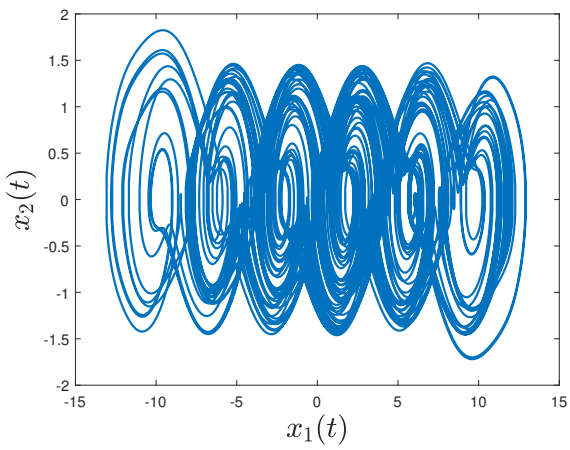
$$C \triangleq [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad L \triangleq 10[l_1, l_2, l_3, l_4]^T.$$



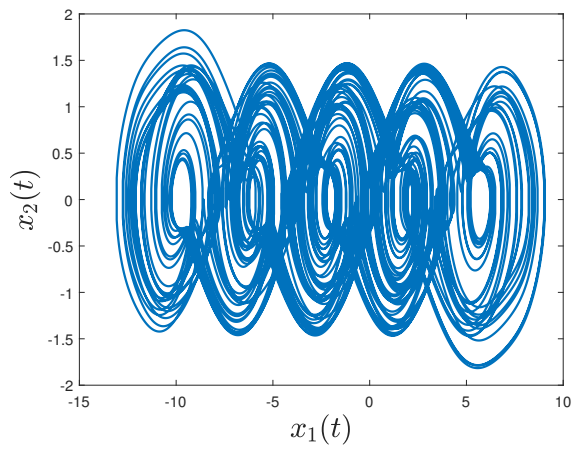
(a) Dinámica cíclica.



(b) Chaotic dynamic.

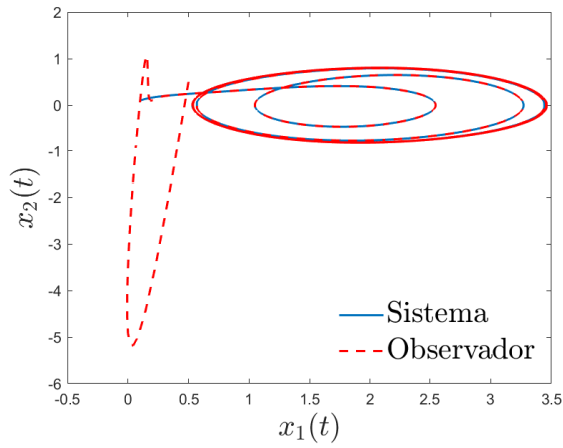


(c) Chaotic dynamic.

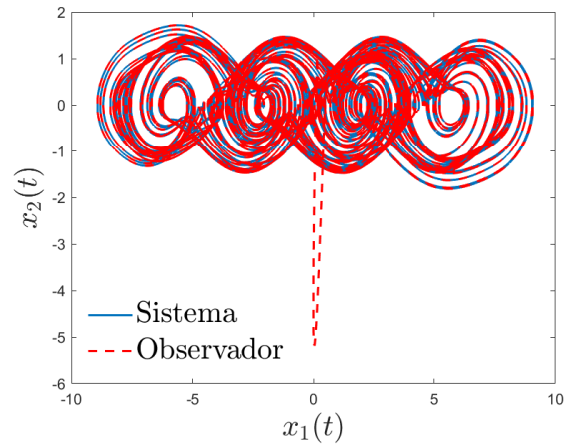


(d) Chaotic dynamic.

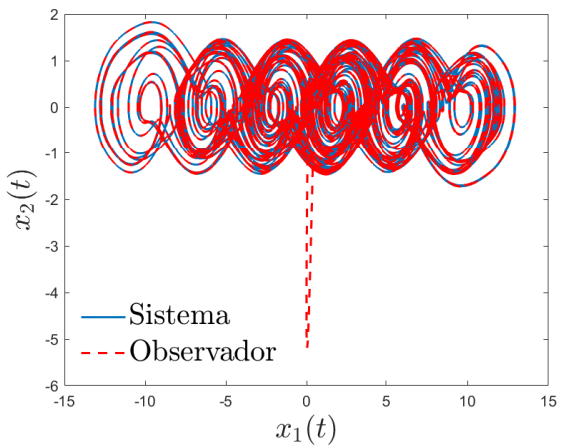
Figura 1: Planos de fase del sistema (12) con diferentes dinámicas.



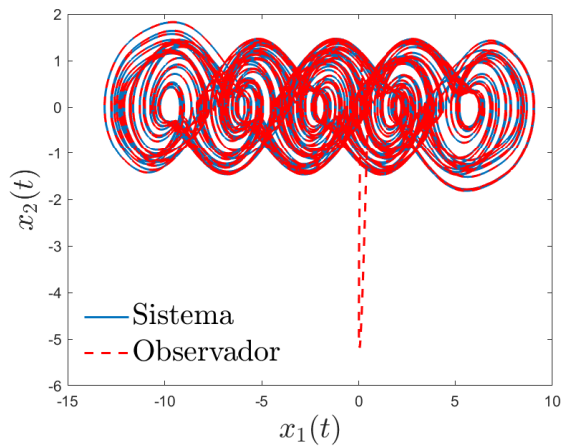
(a) Sincronización con dinámica cíclica.



(b) Sincronización con dinámica caótica.

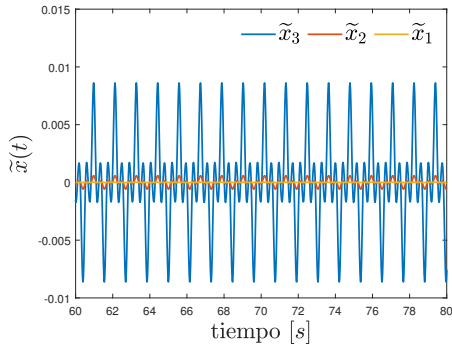


(c) Sincronización con dinámica caótica.

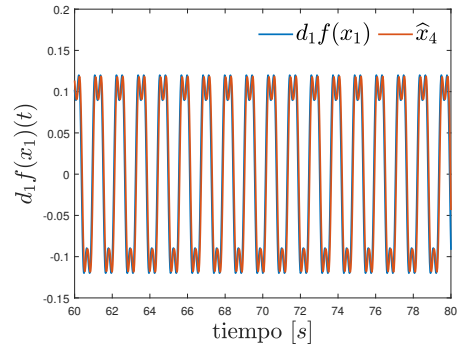


(d) Sincronización con dinámica caótica.

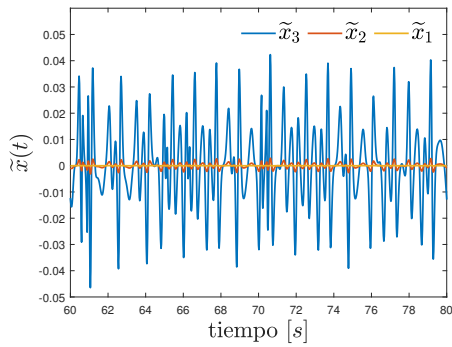
Figura 2: Planos de fase del sistema (12) y del observador (14), considerando diferentes dinámicas.



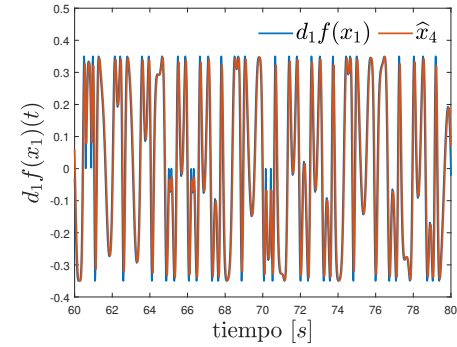
(a) Error de sincronización con dinámica cíclica ( $d_1 = 0.12$ ,  $k_n = 3$ ,  $k_p = 3$ ).



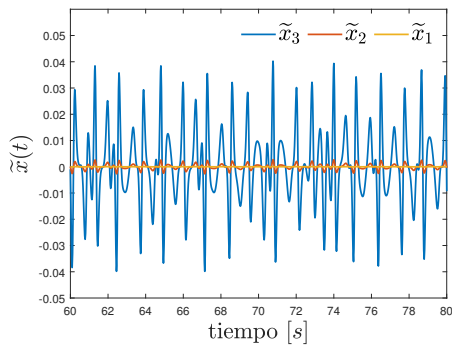
(b) Estimación del término  $d_1f(x_1)$ , con dinámica cíclica ( $d_1 = 0.12$ ,  $k_n = 3$ ,  $k_p = 3$ ).



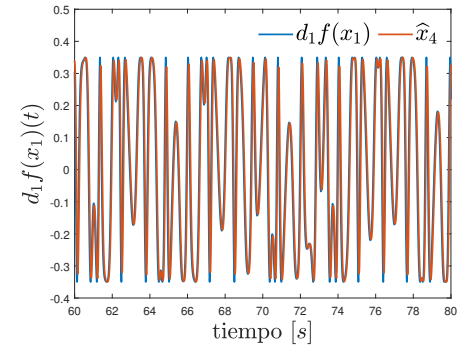
(c) Error de sincronización con dinámica caótica ( $d_1 = 0.35$ ,  $k_n = 2$ ,  $k_p = 2$ ).



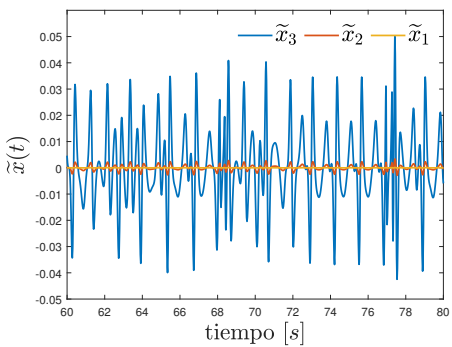
(d) Estimación del término  $d_1f(x_1)$ , con dinámica caótica ( $d_1 = 0.35$ ,  $k_n = 2$ ,  $k_p = 2$ ).



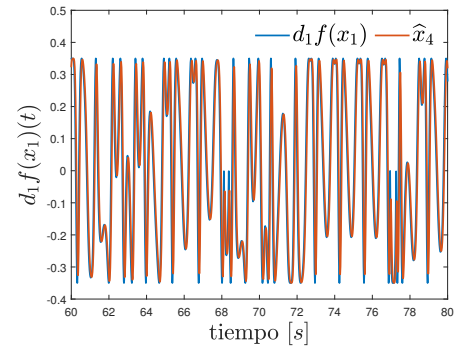
(e) Error de sincronización con dinámica caótica ( $d_1 = 0.35$ ,  $k_n = 3$ ,  $k_p = 3$ ).



(f) Estimación del término  $d_1f(x_1)$ , con dinámica caótica ( $d_1 = 0.35$ ,  $k_n = 3$ ,  $k_p = 3$ ).



(g) Error de sincronización con dinámica caótica ( $d_1 = 0.35$ ,  $k_n = 3$ ,  $k_p = 2$ ).



(h) Estimación del término  $d_1f(x_1)$ , con dinámica caótica ( $d_1 = 0.35$ ,  $k_n = 3$ ,  $k_p = 2$ ).

Figura 3: Errores de sincronización y estimaciones del término término  $d_1f(x_1)$ , considerando diferentes diámicas.

Las simulaciones numéricas utilizan el método implícito de Euler (con un paso de integración  $h = 1 \times 10^{-3}$ ) para resolver (12) y (14). Las condiciones iniciales fueron establecidas como:

$$x(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = 0.1 \in \mathbb{R}^3, \quad (15)$$

$$\tilde{x}(0) = [\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0), \tilde{x}_3(0), \tilde{x}_4(0)]^T = 0.5 \in \mathbb{R}^4. \quad (16)$$

El vector de ganancia  $L$  del observador fue sintonizado por colocación de polos  $A - LC$ , con  $l_1 = \frac{2}{5}\omega_0 - c$ ,  $l_2 = \frac{3}{50}\omega_0^2 - cl_1$ ,  $l_3 = \frac{2}{500}\omega_0^3 - a - cl_2$  y  $l_4 = \frac{1}{10000}\omega_0^4$  para  $\omega_0 = 50 \text{ rad/seg}$ .

La Figura 2 ilustra la sincronización del observador (14) con el sistema (12). Se puede observar que los plano de fase  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  convergen al los planos de fase  $(x_1, x_2)$  del sistema (12). En la Figura 3 se presentan los errores de sincronización y las estimaciones del término no lineal  $d_1 f(x_1)$  para las diferentes dinámicas. En las Figuras 3(a), 3(c), 3(e) y 3(g) se muestran los errores de sincronización  $\tilde{x}_1(t)$ ,  $\tilde{x}_2(t)$ ,  $\tilde{x}_3(t)$  tiempo después de la respuesta transitoria, particularmente, durante  $t \in [60, 80]$ . Aquí, se puede apreciar que los errores de sincronización se mantienen acotados y oscilando alrededor de cero. Por otro lado, en las Figuras 3(b), 3(d), 3(f) y 3(h) se muestra la estimación del término no lineal  $d_1 f(x_1)$ . Aquí, se puede observar que la trayectoria de  $\hat{x}_4$  converge hacia la dinámica  $d_1 f(x_1)$  y se mantiene oscilando alrededor de ella. Es importante resaltar que el observador propuesto se sincroniza con los sistema caóticos de múltiple enrollamiento de la forma (1) sin conocer el término no lineal  $f(\cdot)$  que genera los enrollamientos. Además, el análisis presentado puede ser extendido a sistemas caóticos de múltiple enrollamiento representados por ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor a tres.

## 5. Conclusiones

Este artículo describe el diseño de un observador de estado extendido para resolver el problema de sincronización de sistemas caóticos de múltiple enrollamiento. En la propuesta, los sistemas caóticos en estudio están descritos por una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, donde el único término no lineal se considera como estado extendido. Mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov se demuestra que la trayectorias de los errores de estimación se mantienen acotados de manera uniforme. Simulaciones de un ejemplo numérico ilustran la efectividad del observador propuesto. La dirección de esta investigación se enfoca en el encriptamiento de información biométrica.

## Referencias

Abundiz-Pérez, F., Cruz-Hernández, C., Murillo-Escobar, M., López-Gutiérrez, R., y Arellano-Delgado, A. (2016). A fingerprint image encryption scheme based on hyperchaotic rössler map. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016.

Bonny, T., Nassan, W. A., Vaidyanathan, S., y Sambas, A. (2023). Highly-secured chaos-based communication system using cascaded masking technique and adaptive synchronization. *Multimedia Tools and Applications*, pp. 1–30.

Carbajal-Gómez, V. y Sánchez-López, C. (2019). Determining accurate lyapunov exponents of a multiscroll chaotic attractor based on snfs. *Nonlinear Dynamics*, 98(3):2389–2402.

Chen, Z., Wen, G., Zhou, H., y Chen, J. (2017). Generation of grid multi-scroll chaotic attractors via hyperbolic tangent function series. *Optik*, 130:594–600.

Ding, P. y Feng, X. (2020). Generation of multi-scroll chaotic attractors from a jerk circuit with a special form of a sine function. *Electronics*, 9(5):842.

Gómez-Guzmán, L., Cruz-Hernández, C., López-Gutiérrez, R., y García-Guerrero, E. (2009). Synchronization of chuas circuits with multi-scroll attractors: application to communication. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(6):2765–2775.

Kekha Javan, A. A., Zare, A., Alizadehsani, R., y Balochian, S. (2022). Robust multi-mode synchronization of chaotic fractional order systems in the presence of disturbance, time delay and uncertainty with application in secure communications. *Big Data and Cognitive Computing*, 6(2):51.

Li, F. y Zeng, J. (2023). Multi-scroll attractor and multi-stable dynamics of a three-dimensional jerk system. *Energies*, 16(5):2494.

Li, Q. y Yue, C. (2020). Predefined-time modified function projective synchronization for multiscroll chaotic systems via sliding mode control technology. *Complexity*, 2020:1–11.

Liu, S., Wei, Y., Liu, J., Chen, S., y Zhang, G. (2020). Multi-scroll chaotic system model and its cryptographic application. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 30(13):2050186.

Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141.

Murillo-Escobar, M. A., Cardoza-Avendaño, L., López-Gutiérrez, R. M., y Cruz-Hernández, C. (2017). A double chaotic layer encryption algorithm for clinical signals in telemedicine. *Journal of medical systems*, 41:1–17.

Nijmeijer, H. y Mareels, I. M. (1997). An observer looks at synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and applications*, 44(10):882–890.

Pecora, L. M. y Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8):821.

Pérez-Cruz, J. H., Portilla-Flores, E. A., Niño-Suárez, P. A., y Rivera-Blas, R. (2017). Design of a nonlinear controller and its intelligent optimization for exponential synchronization of a new chaotic system. *Optik*, 130:201–212.

Plata, C., Prieto, P. J., Ramirez-Villalobos, R., y Coria, L. N. (2020). Chaos synchronization for hyperchaotic lorenz-type system via fuzzy-based sliding-mode observer. *Mathematical and Computational Applications*, 25(1):16.

Roldán-Caballero, Alfredo and Pérez-Cruz, J Humberto and Hernández-Márquez, Eduardo and García-Sánchez, José Rafael and Ponce-Silva, Mario and Rubio, Jose de Jesus and Villarreal-Cervantes, Miguel Gabriel and Martínez-Martínez, Jesús and García-Trinidad, Enrique and Mendoza-Chegue, Alejandro and others (2023). Synchronization of a new chaotic system using adaptive control: Design and experimental implementation. *Complexity*, 2023.

Rössler, O. E. (1979). An equation for hyperchaos. *Physics Letters A*, 71:155–157.

Signing, V. F., Kengne, J., y Pone, J. M. (2019). Antimonotonicity, chaos, quasi-periodicity and coexistence of hidden attractors in a new simple 4-d chaotic system with hyperbolic cosine nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 118:187–198.

Sira-Ramirez, H. y Cruz-Hernández, C. (2001). Synchronization of chaotic systems: A generalized hamiltonian systems approach. *International Journal of bifurcation and chaos*, 11(05):1381–1395.

Sprott, J. C. (1994). Some simple chaotic flows. *Physical review E*, 50(2):R647.

Tlelo-Cuautle, E., Carbajal-Gomez, V., Obeso-Rodelo, P., Rangel-Magdaleno, J., y Nunez-Perez, J. C. (2015). Fpga realization of a chaotic communication system applied to image processing. *Nonlinear Dynamics*, 82:1879–1892.

Wang, F. y Xiao, Y. (2020). A multiscroll chaotic attractors with arrangement of saddle-shapes and its field programmable gate array (fpga) implementation. *Complexity*, 2020.

Yujun, N., Xingyuan, W., Mingjun, W., y Huaguang, Z. (2010). A new hyperchaotic system and its circuit implementation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(11):3518–3524.

Zambrano-Serrano, E., Munoz-Pacheco, J. M., Serrano, F. E., Sánchez-Gaspariano, L. A., y Volos, C. (2021). Experimental verification of the multi-scroll chaotic attractors synchronization in pwl arbitrary-order systems using direct coupling and passivity-based control. *Integration*, 81:56–70.

Zhang, X. y Wang, C. (2019). A novel multi-attractor period multi-scroll chaotic integrated circuit based on cmos wide adjustable cccii. *IEEE Access*, 7:16336–16350.