

Control por modos deslizantes basado en proxy activo con rechazo a perturbaciones mediante observador difuso de estado extendido

Active disturbance rejection proxy-based sliding mode control using a fuzzy extended state observer

P. J. Prieto-Entenza ^a, C. Plata-Ante ^b, L. N. Coria-de los Ríos ^b, R. Ramírez-Villalobos ^{b,*}, O. A. García-Alarcón ^c, J. A. Camacho-Gonzalez ^a

^aEscuela de Ingeniería, CETYS Universidad, 22210, Tijuana, Baja California, México.

^bDepartamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana, 22414, Tijuana, Baja California, México.

^cDepartamento de Ingeniería Mecatrónica, Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico Superior de Xalapa, 91096, Xalapa, Veracruz, México.

Resumen

Este artículo presenta el control por modo deslizante basado en proxy, una metodología enfocada para sistemas de segundo orden. En el lazo de control propuesto se utiliza un observador de estado extendido difuso, basado en el sistema de inferencia tipo Mamdani para estimar las perturbaciones externas y acoplarlo en el lazo cerrado con el objetivo de atenuar la influencia de perturbaciones externas. Para corroborar los resultados obtenidos, se presentan simulaciones numéricas del control por modos deslizante basado en proxy en conjunto con el observador de estado extendido difuso aplicado a un péndulo simple.

Palabras Clave: Modos deslizante basado en proxy, observador de estado extendido, sistema difuso tipo Mamdani.

Abstract

This paper presents the proxy-based sliding mode control, a methodology focused for second-order systems. In this proposal, in the control loop we use an fuzzy extended state observer based on Mamdani-type inference system, in order to estimate external disturbances and provide it to the controller with the aim of attenuating the influence of external disturbances. To corroborate the obtained results, we introduce numerical simulation of proxy-based sliding mode controller interconnected with fuzzy extended state observer applied to a single pendulum.

Keywords: Proxy-based sliding mode, extended state observer, Mamdani-type fuzzy system.

1. Introducción

El control por modos deslizante basado en proxy (PSMC del inglés *Proxy-based sliding mode control*) ha estado enfocado a sistemas de segundo orden, especialmente para resolver el problema de regulación de la posición en robots manipuladores (Kikuuwe et al., 2010). El algoritmo de control presenta algunas ventajas como precisión durante operación y respuesta sobreamortiguada después de alcanzar valores máximos de error de posición (Kikuuwe et al., 2010; Kikuuwe, 2018). Además, PSMC se comporta como un control proporcional-derivativo-integral mientras el actuador no se encuentre saturado (Kikuuwe et al., 2010; Kikuuwe, 2018). Aplicaciones

reales del PSMC han sido reportadas en brazos manipuladores (Kikuuwe et al., 2010), sistemas neumáticos (Aschemann and Schindele, 2008; Van Damme et al., 2009; Prieto et al., 2013; Zhao et al., 2019), robots flexibles (Kashiri et al., 2016; Sun et al., 2019), celdas de combustible (Mojallal and Lotfifard, 2017) y en robots de rehabilitación (Cao et al., 2019; Huang et al., 2016), entre otras.

El PSMC combina las características fundamentales del control por modos deslizante (SMC del inglés *Sliding-mode control*) de primer orden tales como la robustez ante perturbaciones externas e incorpora el control proporcional-integral-derivativo (PID) en caso de que la dinámica del sistema converja a la vecindad de la superficie deslizante. De esta forma, se

*Autor para correspondencia: ramon.ramirez@tectijuana.edu.mx

Correo electrónico: pablo.prieto@cetys.mx (Pablo José Prieto-Entenza), corina.plata@tectijuana.edu.mx (Corina Plata-Ante), luis.coria@tectijuana.edu.mx (Luis Nestor Coria-de los Ríos), ramon.ramirez@tectijuana.edu.mx (Ramón Ramírez-Villalobos), octavio.garcia@itsx.edu.mx (Octavio Augusto García-Alarcón), jesus.camacho@cetys.mx (Jesús Antonio Camacho-González).

evita el efecto del *chattering* producto de la implementación de la función multi-evaluada, propia de sistemas por modos deslizantes.

La robustez del PSMC es aún un campo abierto. En la contribución original, la estabilidad se basa en conjeturas (Kikuuwe et al., 2010). En los trabajos de Kashiri et al. (2016) y Sun et al. (2019) se proponen funciones candidatas de Lyapunov para verificar la estabilidad asintótica del PSMC en robots de uniones flexibles. Sin embargo, estas investigaciones no consideran la presencia de perturbaciones externas.

La influencia de las perturbaciones externas han sido descritas en (Kikuuwe, 2018). En dicho artículo, se establece que hasta el momento no se ha definido una función candidata estricta de Lyapunov con la cual se haya demostrado robustez ante perturbaciones externas. Como resultado, se propone una función candidata de Lyapunov no suave para demostrar la convergencia al origen. En este sentido, la estabilidad se estudia en el dominio de la frecuencia (Kikuuwe et al., 2021; Kikuuwe, 2021). Por otro lado, el comportamiento del PSMC frente a perturbaciones persistentes se ve comprometido por los cambios abruptos de la misma. Por todo lo anterior, un observador de estado extendido no solo puede atenuar el efecto de las señales externas, sino también permite el estudio de la estabilidad del lazo cerrado a través de una candidata estricta de Lyapunov.

El observador de estado extendido (ESO del inglés *Extended state observer*) es una metodología efectiva que estima tanto el vector de estado como la perturbación externa, la cual se asume como el estado extendido (Yan et al., 2008; Guo and Zhao, 2011). La metodología ESO se puede clasificar en: ESO lineal (LESO del inglés *Linear extended state observer*) y ESO no lineal (NESO del inglés *Nonlinear extended state observer*). El método LESO asegura una convergencia rápida para valores grandes de las ganancias del observador, pero conduce a un fenómeno de pico. Para superar los problemas antes mencionados, NESO introduce diferentes funciones no lineales que permiten una convergencia rápida sin el sobrepico (Guo and Zhao, 2011). En este marco de referencia, se propone un observador de estado extendido difuso (FESO del inglés *Fuzzy extended state observer*). La metodología consiste en un ESO con estructura lineal y ganancias de observador inteligentes.

Para resolver el problema de la influencia de la perturbación externa en el lazo cerrado del PSMC, en este artículo se propone el uso de FESO con el objetivo de estimar la perturbación externa y atenuarla en el lazo cerrado controlado por el PSMC. Esta metodología presenta un sistema tipo Mamdani que considera como entrada el error de observación de la posición. El sistema difuso está compuesto por funciones de pertenencia tipo triangular para la clasificación de la variable de entrada y por funciones tipo singleton para la clasificación de la salida. Lo anterior, permite mejorar la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado.

El artículo se ordena de la siguiente manera: la Sección 2 presenta la notación y propiedades matemáticas que se utilizan a lo largo del documento. El planteamiento del problema, así como, una breve descripción del PSMC se presentan en la Sección 3. El diseño del observador se presenta en la Sección 4. En la Sección 5 muestra resultados numéricos que corroboran la propuesta. Finalmente, las conclusiones son presentadas en la Sección 6.

2. Preliminares

A través de este artículo, \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ denotan el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los números positivos, respectivamente. El símbolo $\lambda_{\min}\{A\}$ ($\lambda_{\max}\{A\}$) representa el valor propio mínimo (máximo) de una matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Además, los símbolos $|\cdot|$ y $\|x\|$ denotan el valor absoluto de su argumento y la norma Euclidiana del vector $x \in \mathbb{R}$, respectivamente. El símbolo A^T representa la matrix transpuesta de A .

En el presente artículo, la función signo ($\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) y la función saturación ($\text{sat} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) están definidas como sigue

$$\text{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{if } x \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{if } x = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\text{sat}(x) \triangleq x / \max(1, |x|). \quad (2)$$

Lema 1 (Kikuuwe et al. (2010)). *La relación entre $\text{sgn}(\cdot)$ y $\text{sat}(\cdot)$:*

$$y \in \text{sgn}(x - y) \iff y = \text{sat}(x), \quad (3)$$

se cumple para $x, y \in \mathbb{R}$.

Lema 2 (Yu (2018)). *Sea X, Y matrices con dimensiones apropiadas. Entonces, la siguiente desigualdad se cumple*

$$2X^T Y \leq X^T \Lambda^{-1} X + Y^T \Lambda Y, \quad (4)$$

donde Λ es una matrix simétrica y definida positiva de dimensiones apropiadas.

Lema 3 (Yu (2018)). *Considere las siguientes dos ecuaciones matriciales de Riccati: ecuación diferencial de Riccati con parámetros variantes con el tiempo y la ecuación algebraica de Riccati*

$$\begin{aligned} \dot{P}_1(t) + A_1^T(t)P_1 + P_1(t)A_1(t) + \dots \\ \dots - P_1(t)R_1(t)P_1(t) + Q_1(t) &= 0, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 - P_2 R_2 P_2 + Q_2 = 0, \quad (5b)$$

con condición inicial $P_1(0) > P_2$, los Hamiltonianos correspondiente están dados por

$$H_{1,t} = \begin{bmatrix} Q_1(t) & A_1(t)^T \\ A_1(t) & -R_1(t) \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} Q_2 & A_2^T \\ A_2 & -R_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Si

$$H_2 \geq H_{1,t} \geq 0 \quad (7)$$

y el par (A_2, R_2) es estable entonces:

$$P_1(t) \geq P_2 \geq 0. \quad (8)$$

3. Planteamiento del problema

Considere el siguiente sistema mecánico de segundo orden:

$$\ddot{x} = h(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})\tau + \varphi(t), \quad (9)$$

donde $h(x, \dot{x})$ y $g(x, \dot{x})$ son funciones continuas, las cuales describen la dinámica de la planta, $\tau \in \mathbb{R}$ es el par aplicado como acción de control. La posición del objeto controlado es representado por $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \in \mathbb{R}$ denota la perturbación externa y $t \in \mathbb{R}^+$ es el tiempo. Mientras tanto, definiendo

$$\tilde{x} \triangleq x - x_d, \quad (10)$$

donde $x_d \in \mathbb{R}$ es la referencia, la cual se asume constante y $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ es el error de posición del objeto con respecto la referencia x_d . La segunda derivada de \tilde{x} produce:

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d = h(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})\tau + \varphi(t). \quad (11)$$

El objetivo de control del PSMC puede ser formulado como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0. \quad (12)$$

Para cumplir (12), el error $\tilde{x}(t)$ puede ser linealizado para cancelar los términos no lineales. Entonces, el controlador es propuesto como sigue:

$$\tau = \frac{f - h(x, \dot{x})}{g(x, \dot{x})}, \quad (13)$$

con $g(x, \dot{x}) \neq 0$ para todo $t \geq 0$. Entonces, (11) resulta en:

$$\ddot{\tilde{x}} = f + \varphi(t), \quad (14)$$

donde f es la entrada de control que se obtiene del PSMC descrito en (Kikuuwe et al., 2010; Kikuuwe, 2018; Prieto-Entenza et al., 2019). La siguiente sección refiere a las principales características del PSMC.

3.1. Breve descripción de PSMC

Considere la versión multidimensional del PSMC donde la ley de control f está dada por la siguiente inclusión algebraica diferencial:

$$e_q \triangleq x_d - p, \quad (15a)$$

$$f \in -F \operatorname{sgn}(e_q + H\dot{e}_q), \quad (15b)$$

$$f = K(p - x) + B(\dot{p} - \dot{x}), \quad (15c)$$

donde $p \in \mathbb{R}$ es la posición *proxy*. Una vez que la posición *proxy* esté en modos deslizante $e_q + H\dot{e}_q = 0$, se tiene

$$\dot{e}_q = -e_q/H, \quad (16)$$

lo cual implica que la posición *proxy* converge exponencialmente hacia la referencia x_d . Los parámetros K , $B \in \mathbb{R}_+$ y B son equivalentes a las ganancia proporcional y derivativa de un controlador PD saturado, respectivamente, y satisfacen la condición $KH > B$. La ley de control (15) puede entenderse como un objeto virtual sin masa (“*proxy*”), cuyo vector de posición p es controlado por el controlador (15b). La posición de la variable controlada x es restringida al *proxy* por el controlador tipo PD (cuyas ganancias P y D son K y B , respectivamente) que conecta la posición *proxy* a la posición real del objeto controlado.

En el artículo de Kikuuwe et al. (2010), el *proxy* se asume ser sin masa. Por lo tanto, ambas salidas (15b) y (15c) son iguales a f y las fuerzas desde ambos controladores balancean una a la otra (Kikuuwe, 2018). Para transformar la inclusión algebraica diferencial (15) en un conjunto de ecuaciones diferenciales, se define una nueva variable

$$a \triangleq p - x. \quad (17)$$

El controlador (15) puede ser rescrito en términos de la nueva variable (17) como

$$\sigma = \tilde{x} + H\dot{\tilde{x}}, \quad (18a)$$

$$f \in -F \operatorname{sgn}(\sigma + a + H\dot{a}), \quad (18b)$$

$$f = Ka + B\dot{a}. \quad (18c)$$

En adelante, se considera el hecho de que $\dot{\tilde{x}} = \dot{x}$ donde x_d es un valor constante. De (18c), se tiene

$$\dot{a} = (f - Ka)/B. \quad (19)$$

Sustituyendo (19) en (18b) se tiene

$$\begin{aligned} f &\in F \operatorname{sgn}\left(-\sigma - a - \frac{H}{B}(f - Ka)\right) \\ &= F \operatorname{sgn}\left(-\sigma + \left(\frac{KH - B}{B}\right)a - \frac{H}{B}f\right). \end{aligned} \quad (20)$$

La expresión (20) puede ser reescrita como sigue:

$$f \in F \operatorname{sgn}\left(\frac{B}{H}\left(-\sigma + \left(\frac{KH - B}{B}\right)a\right) - f\right). \quad (21)$$

Multiplicando ambos lados de (21) por F^{-1} y utilizando la propiedad

$$\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(cx), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

en la cual c es una constante positiva, se obtiene

$$F^{-1}f \in \operatorname{sgn}\left(\frac{B}{FH}\left(-\sigma + \left(\frac{KH - B}{B}\right)a\right) - \frac{1}{F}f\right). \quad (23)$$

Debido a la propiedad (3), la relación (23) puede ser expresada como sigue:

$$f = F \operatorname{sat}\left(\frac{B}{FH}\left(-\sigma + \left(\frac{KH - B}{B}\right)a\right)\right). \quad (24)$$

Por lo tanto, la inclusión algebraica diferencial (15) es equivalente analíticamente al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\sigma = \tilde{x} + H\dot{\tilde{x}}, \quad (25a)$$

$$\dot{a} = (f - Ka)/B, \quad (25b)$$

$$f = -F \operatorname{sat}\left(\frac{B}{FH}\left(\sigma - \left(\frac{KH - B}{B}\right)a\right)\right), \quad (25c)$$

las cuales son una forma alternativa del PSMC. Si $|f| < F$, la siguiente desigualdad

$$\left|\sigma - \left(\frac{KH - B}{B}\right)a\right| < \frac{FH}{B}$$

se cumple. Así, el *proxy* se encuentra un modos deslizante $\sigma + a + H\dot{a} = 0$ y la ley de control (25c) se convierte en un control PD saturado

$$f = -K\tilde{x} - B\dot{\tilde{x}}. \quad (26)$$

Se puede notar que la acción del PSMC puede verse comprometida por la influencia de las perturbaciones externas dado que solo es capaz de acotar las trayectorias del lazo cerrado. Por ello, en la siguiente sección describimos la propuesta de observador de estado extendido.

4. Estimación de la perturbación basada en un observador difuso de estado extendido

En esta sección se presenta el diseño de un observador difuso de estado extendido para estimar una perturbación externa en sistemas mecánicos de segundo orden.

Primero, considerando $\xi_1 = x$ y $\xi_2 = \dot{x}$, el sistema (9) puede ser descrito por la siguiente representación en espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ h(\xi_1, \xi_2) + g(\xi_1, \xi_2)\tau + \phi(t) \end{bmatrix}, \quad (27a)$$

$$y = \xi_1. \quad (27b)$$

Ahora, considerando $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$ con el estado extendido $\dot{\xi}_3 = \varphi(t)$, el sistema (27) puede ser descrito como:

$$\dot{\xi} = A\xi + \Phi(\xi, \tau) + D\varphi(t), \quad (28a)$$

$$y = C\xi, \quad (28b)$$

donde $\varphi(t)$ es una función desconocida pero acotada que describe la perturbación externa, y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (29a)$$

$$\Phi(\xi, \tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ h(\xi_1, \xi_2) + g(\xi_1, \xi_2)\tau \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (29b)$$

Aquí, el par (A, C) se asume observable. Para resolver el problema de estimación de perturbaciones, se propone un observador difuso a continuación.

4.1. Diseño del observador

En esta sección se describe un observador difuso de estado extendido de la siguiente forma:

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + \Phi(\hat{\xi}, \tau) + L\Psi(\bar{y}), \quad (30a)$$

$$\bar{y} = y - C\hat{\xi}, \quad (30b)$$

donde $\hat{\xi}(t)$ denota la estimación de $\xi(t)$, $\bar{y}(t)$ representa el error de la salida, $L \in \mathbb{R}^3$ es la matriz de ganancia del observador, y $\Psi(\cdot)$ denota el sistema de inferencia difuso representado por la siguiente regla *if – then*:

$$R_i : \text{Si } \bar{y} \text{ es } M_i \text{ entonces } \Psi \text{ es } \psi_i. \quad (31)$$

El sistema difuso es representado por funciones triangulares de membresía para la variable de entrada \bar{y} están definidas como:

$$M_i := \begin{cases} \frac{\bar{y}-e_{i-1}}{e_i-e_{i-1}} & \text{if } e_{i-1} \leq \bar{y} < e_i \\ \frac{e_{i+1}-\bar{y}}{e_{i+1}-e_i} & \text{if } e_i \leq \bar{y} < e_{i+1} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad (32)$$

donde el error \bar{y} es la variable difusa a la entrada, y ψ_i es el valor en la salida Ψ . El universo de \bar{y} es particionado como $\bar{y} \in \{e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2\}$ donde $e_{-i} = -e_i$ y $e_0 = 0$. Las funciones de membresía del sistema difuso de salida $\psi \in \{\psi_{-2}, \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \psi_2\}$ son funciones tipo *singleton* donde $\psi_i = -\psi_{-i}$ y $\psi_0 = 0$. El sistema de inferencia difusa satisface varias propiedades (Prieto-Entenza et al., 2019):

i) $\Psi(\cdot)$ es continua y acotada.

ii) $\Psi(0) = 0$ implica que el origen es un punto de equilibrio.

iii) La condición $\Psi(\bar{y}) = -\Psi(-\bar{y})$ asegura que el sistema difuso es simétrico con respecto al punto de equilibrio.

Mientras tanto, todo el universo para \bar{y} y ψ están representados por cinco conjuntos difusos: *NB* (negativo grande), *NS* (negativo pequeño), *ZR* (cero), *PS* (positivo pequeño) y *PB* (positivo grande).

El lado derecho de ψ es representado como:

$$\Psi = \sum_i \left\{ \frac{M_i}{M_r} \right\} \psi_i. \quad (33)$$

Nótese que

$$M_r := M_i + M_{i+1} = \frac{\bar{y} - e_{i+1}}{e_i - e_{i+1}} + \frac{\bar{y} - e_i}{e_{i+1} - e_i} = 1, \quad (34)$$

porque solamente dos reglas se cumplen al mismo tiempo. Entonces, el sistema de inferencia difusa (33) se reescribe como sigue (Prieto-Entenza et al., 2019):

$$\Psi(\bar{y}) = M_i\psi_i + M_{i+1}\psi_{i+1} = \frac{\Delta\psi}{\Delta\bar{y}}\bar{y} + \frac{1}{\Delta\bar{y}}(e_{i+1}\psi_i - e_i\psi_{i+1}), \quad (35)$$

donde $\Delta\psi \triangleq \psi_{i+1} - \psi_i$ y $\Delta\bar{y} \triangleq e_{i+1} - e_i$. Por lo tanto, se concluye que $\Psi(\cdot)$ es una función continua a trazos donde

$$\Psi(\bar{y}) \propto \bar{y}. \quad (36)$$

El sistema difuso $\Psi(\bar{y})$ es definido por la siguiente notación para el siguiente análisis

$$\Psi(\bar{y}) \triangleq \Delta\bar{y} + \zeta(e_i, \psi_i), \quad (37)$$

donde

$$\Delta \triangleq \frac{\Delta\psi}{\Delta\bar{y}}, \quad \zeta(e_i, \psi_i) \triangleq \frac{1}{\Delta\bar{y}}(e_{i+1}\psi_i - e_i\psi_{i+1}). \quad (38)$$

4.2. Análisis de estabilidad

Primero, se define el error de estimación como $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}$. Entonces, considerando (28) y (30), la dinámica del error de estimación se describe como sigue:

$$\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} + \Phi(\xi, \tau) - \Phi(\hat{\xi}, \tau) - L\Psi(\bar{y}) + D\varphi(t). \quad (39)$$

Ahora, considerando el sistema difuso $\Psi(\bar{y})$ definido en (37), la dinámica del error (39) puede reescribirse como:

$$\dot{\tilde{\xi}} = \bar{A}(t)\tilde{\xi} + \Phi(\xi, \tau) - \Phi(\hat{\xi}, \tau) - L\zeta(e_i, \psi_i) + D\varphi(t), \quad (40)$$

donde $\Delta\bar{y} = \Delta C\tilde{\xi}$, y consecuentemente $\bar{A}(t) = A - LC\Delta$ es una matriz variante con el tiempo porque contiene pendientes a trazos del sistema difuso $\Psi(\bar{y})$. Los elementos de L , los parámetros del sistema difuso ψ_i y e_i son elegidos tal que $\bar{A}(t)$ sea una matriz positiva y acotada uniformemente (Naghdí and Sadriani, 2020).

Mientras tanto, en lo siguiente se supone en adelante:

(S1) El escalar $\varphi(t)$ es una función desconocida pero acotada con límite superior conocido, es decir, existe una constante positiva φ^+ tal que $|\varphi(t)| \leq \varphi^+$.

(S2) El término no lineal $\Phi(\xi, \tau)$ en (28) es localmente Lipschitz en un dominio \mathcal{D} y uniformemente acotado en τ , es decir, satisface

$$\|\Phi(\xi, \tau) - \Phi(\widehat{\xi}, \tau)\| \leq \gamma_L \|\xi - \widehat{\xi}\| \quad \forall \xi \in \mathcal{D}, \quad (41)$$

donde $\gamma_L > 0$ es la constante de Lipschitz.

Ahora, en el análisis de estabilidad considere la función de Lyapunov $V(\widetilde{\xi}, t) = \widetilde{\xi}^T P_1(t) \widetilde{\xi}$ para la dinámica del error (39). Aquí, $P_1(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz (i) continuamente diferenciable, (ii) simétrica, (iii) acotada, y (iv) definida positiva. Bajo los supuestos anteriores, existe $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+$ que satisfacen $\eta_1 \|\widetilde{\xi}\| \leq \widetilde{\xi}^T P_1(t) \widetilde{\xi} \leq \eta_2 \|\widetilde{\xi}\|$. Esto implica que $V(\widetilde{\xi}, t)$ es definida positiva y radialmente desacotada. La derivada temporal de $V(\widetilde{\xi}, t)$ a lo largo de las trayectorias de (39) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\widetilde{\xi}, t) &= \widetilde{\xi}^T \left(\dot{P}_1(t) + \bar{A}(t)^T P_1(t) + P_1(t) \bar{A}(t) \right) \widetilde{\xi} \\ &\quad + 2\widetilde{\xi}^T P_1(t) \left(\Phi(\xi, \tau) - \Phi(\widehat{\xi}, \tau) \right) \\ &\quad - 2\widetilde{\xi}^T P_1(t) L \zeta(e_i, \psi_i) + 2\widetilde{\xi}^T P_1(t) D \varphi(t). \end{aligned} \quad (42)$$

De acuerdo con el Lema 2, si se considera $X = P(t) \widetilde{\xi}$ y $Y = f(\widetilde{\xi}, u) - f(\xi, u)$, entonces, se establece la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\widetilde{\xi}, t) &\leq \\ &\quad \widetilde{\xi}^T \left(\dot{P}_1(t) + \bar{A}(t)^T P_1(t) + P_1(t) \bar{A}(t) + P_1(t) \Lambda^{-1} P_1(t) \right) \widetilde{\xi} \\ &\quad + \left(\Phi(\xi, \tau) - \Phi(\widehat{\xi}, \tau) \right)^T \Lambda \left(\Phi(\xi, \tau) - \Phi(\widehat{\xi}, \tau) \right) \\ &\quad - 2\widetilde{\xi}^T P_1(t) L \zeta(e_i, \psi_i) + 2\widetilde{\xi}^T P_1(t) D \varphi(t). \end{aligned} \quad (43)$$

Por lo tanto, con la suposición S2, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\widetilde{\xi}, t) &\leq \widetilde{\xi}^T \left(\dot{P}_1(t) + \bar{A}(t)^T P_1(t) + P_1(t) \bar{A}(t) \right. \\ &\quad \left. + P_1(t) \Lambda^{-1} P_1(t) + \gamma_L^2 \Lambda \right) \widetilde{\xi} \\ &\quad - 2\widetilde{\xi}^T P_1(t) L \zeta(e_i, \psi_i) + 2\widetilde{\xi}^T P_1(t) D \varphi(t). \end{aligned} \quad (44)$$

Ahora, utilizando Lemma 3, particularmente si se considera $\bar{A}(t) = A_1(t)$, $-\Lambda = R_1(t)$ y $\gamma_L^2 \Lambda = Q_1(t)$, la solución $P_1(t)$ en (44) mayor o igual que la solución la solución P_2 en

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 - P_2 R_2 P_2 + Q_2 = 0, \quad (45)$$

con condición inicial $P_1(0) > P_2$. Entonces, si la solución P_2 se selecciona tal que la siguiente ecuación algebraica de Riccati:

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 - P_2 R_2 P_2 + Q_2 = -\bar{Q}, \quad (46)$$

se satisface para cualquier matriz simétrica y definida positiva \bar{Q} , se obtiene

$$\dot{V}(\widetilde{\xi}, t) \leq -\widetilde{\xi}^T \bar{Q} \widetilde{\xi} - 2\widetilde{\xi}^T P_2 L \zeta(e_i, \psi_i) + \widetilde{\xi}^T P_2 D \varphi(t). \quad (47)$$

Aquí, los elementos de L son seleccionados tal que se cumple $P_2 L = C^T$. Así, (47) puede reescribirse como:

$$\dot{V}(\widetilde{\xi}, t) \leq -\widetilde{\xi}^T \bar{Q} \widetilde{\xi} - 2\widetilde{\xi}^T C^T \zeta(e_i, \psi_i) + \widetilde{\xi}^T P_2 D \varphi(t). \quad (48)$$

De acuerdo con (30), $\widetilde{y} = \widetilde{\xi}^T C^T$ y así (48) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\widetilde{\xi}, t) &\leq -\widetilde{\xi}^T \bar{Q} \widetilde{\xi} - 2\widetilde{y} \zeta(e_i, \psi_i) + 2\widetilde{\xi}^T P_2 D \varphi(t) \\ &\leq -\left(\lambda_{\min}\{\bar{Q}\} \|\widetilde{\xi}\| - 2\lambda_{\max}\{P_2\} \varphi^+ \right) \|\widetilde{\xi}\| \\ &\quad - 2\widetilde{y} \zeta(e_i, \psi_i). \end{aligned} \quad (49)$$

Sustituyendo (38) en la desigualdad (49), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\widetilde{\xi}, t) &\leq -\left(\lambda_{\min}\{\bar{Q}\} \|\widetilde{\xi}\| - 2\lambda_{\max}\{P_2\} \varphi^+ \right) \|\widetilde{\xi}\| \\ &\quad - \frac{2\widetilde{y}}{\Delta \widetilde{y}} (e_{i+1} \psi_i - e_i \psi_{i+1}). \end{aligned} \quad (50)$$

Si el error de estimación es positivo, es decir, $\widetilde{y} \in [e_i, e_{i+1}]$, entonces $\Delta \widetilde{y} > 0$. Por lo tanto, los parámetros e_i, e_{i+1}, ψ_i y ψ_{i+1} deben ser sintonizados tal que el término del lado de derecho de la desigualdad (50) sea: $e_{i+1} \psi_i - e_i \psi_{i+1} \geq 0$. Por lo tanto, $\dot{V}(\widetilde{x})$ es una función negativa definida para todo $\widetilde{\xi}$ fuera del conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \widetilde{\xi} : \|\widetilde{\xi}\| > \frac{2\varphi^+ \lambda_{\max}\{P_2\}}{\lambda_{\min}\{\bar{Q}\}} \right\}, \quad (51)$$

y

$$\frac{\psi_i}{e_i} \geq \frac{\psi_{i+1}}{e_{i+1}}. \quad (52)$$

Ahora, se considera cuando el error de estimación \widetilde{y} es negativo. En este caso, $\Delta \widetilde{y} = \psi_{-i+1} - \psi_{-i} > 0$, con $\widetilde{y} = -|\widetilde{y}|$. Entonces, el último término de (50) es expresado como:

$$\begin{aligned} -2\widetilde{y} \left(\frac{e_{-i+1} \psi_{-i} - e_{-i} \psi_{-i+1}}{e_{-i+1} - e_{-i}} \right) &= \\ 2|\widetilde{y}| \left(\frac{e_{-i+1} \psi_{-i} - e_{-i} \psi_{-i+1}}{e_{-i+1} - e_{-i}} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Aquí, (50) es modificado como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\widetilde{\xi}, t) &\leq -\left(\lambda_{\min}\{\bar{Q}\} \|\widetilde{\xi}\| - 2\lambda_{\max}\{P_2\} \varphi^+ \right) \|\widetilde{\xi}\| \\ &\quad + \frac{2|\widetilde{y}|}{\Delta \widetilde{y}} (e_{-i+1} \psi_{-i} - e_{-i} \psi_{-i+1}). \end{aligned} \quad (54)$$

El último término del lado derecho en (54) satisface la desigualdad $e_{-i+1} \psi_{-i} - e_{-i} \psi_{-i+1} \leq 0$ y consecuentemente $\dot{V}(\widetilde{x})$ es una función negativa definida para toda \widetilde{x} fuera del conjunto \mathcal{B} definido en (51) y

$$\frac{\psi_{-i}}{e_{-i}} \leq \frac{\psi_{-i+1}}{e_{-i+1}}, \quad (55)$$

que es equivalente a (52). Por lo tanto, $\widetilde{\xi}(t)$ tiene cota última con respecto a \mathcal{B} .

5. Resultados

En esta Sección se presenta simulaciones numéricas donde se presentan PSMC y FESO combinado con un péndulo en lazo cerrado con el objetivo de remarcar el aporte del observador cuando la planta recibe una perturbación externa.

5.1. Péndulo simple

Considerando la dinámica de un péndulo

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) + f_v\dot{\theta} = Ku + \varphi(t), \quad (56)$$

donde $\theta(t) \in [-2\pi, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ es la posición angular del péndulo y $u(t)$ es la entrada de control que recibe la acción del PSMC. En este caso, las ganancias proporcional y derivativa del PSMC son ajustadas como $\{F, H, K, B\} = \{10, 0,5, 1000, 2\}$. Los parámetros del péndulo se muestran en la Tabla 1. Por otro lado, las perturbaciones externas $h(t) \in \mathbb{R}$ puede definirse como cambios abruptos definidos como:

$$\varphi(t) \triangleq (t-2) \cdot (\chi(t-1) - \chi(t-2)) + \chi(t-4) - \chi(t-6) + \sin(t) \cdot \chi(t-6) + \phi(t), \quad (57)$$

donde $\chi(\cdot)$ es la función paso unitario de Heaviside definido como:

$$\chi(t-a) \triangleq \begin{cases} 1 & t \geq a, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Tabla 1: Parámetros del péndulo

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa de la carga	m	1.2 kg
Longitud del péndulo	l	0.1 m
Coefficiente de fricción viscosa	f_v	$2,4 \times 10^{-4}$ N/ms
Constante de gravedad	g	9.8 m/s ²
Constante del torque del motor	K	10

Definiendo, $\xi_1(t) = \theta(t) - \theta_d$ como el error de la posición angular (θ_d es la referencia), $\xi_2(t) = \dot{\theta}(t)$ el error de velocidad angular y $\xi_3(t) = \frac{\varphi(t)}{ml^2}$, el sistema (56) puede ser representado por el siguiente modelo de espacio estado extendido:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -\frac{f_v}{ml^2}\xi_2 + \xi_3 - \frac{g}{l}\sin(\xi_1 + \theta_d) + \frac{K}{ml^2}u \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad (58a)$$

$$y = \xi_1, \quad (58b)$$

donde $\varphi(t)$ es una función desconocida pero acotada. Definiendo $\widehat{\xi} = [\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2, \widehat{\xi}_3]^T$, el observador difuso (30) es diseñado como:

$$f_1(\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2, u) = -\frac{f_v}{ml^2}\widehat{\xi}_2 - \frac{g}{l}\sin(\widehat{\xi}_1 + \theta_d) + \frac{K}{ml^2}u \quad (59)$$

y

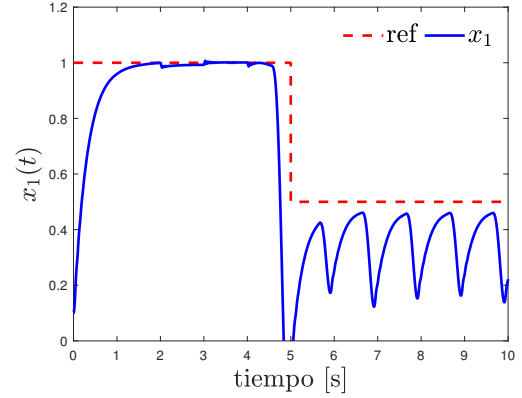
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

La matriz L y las funciones de pertenencias del sistema difuso son ajustados como $L = \text{diag}\{60, 1200, 8000\}$ y

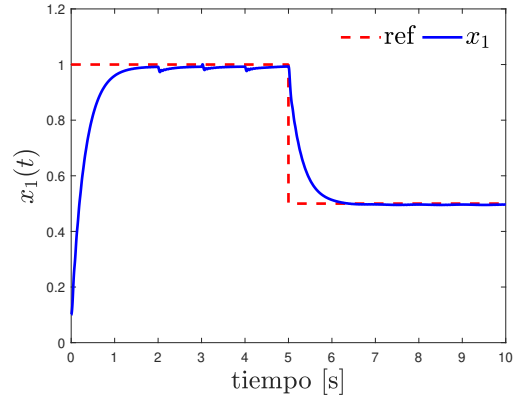
$$\Psi^1 = \Psi^2 = \begin{cases} e^1, e^2 & \in \{-10, -0,4, 0, 0,4, 10\} \\ \psi^1, \psi^2 & \in \{-1, -0,6, 0, 0,6, 1\} \end{cases}, \quad (61)$$

$$\Psi^3 = \begin{cases} e^3 & \in \{-10, -0,3, 0, 0,3, 10\} \\ \psi^3 & \in \{-1, -0,7, 0, 0,7, 1\}. \end{cases}$$

La Figura 1 muestra dos situaciones: el primer caso es dinámica del lazo cerrado sometido a la perturbacion externa (57). El segundo caso corresponde a la dinámica del lazo cerrado compensado con la estimación de la perturbación \widehat{x}_3 .



(a) Posición angular x_1 y la referencia con la presencia de perturbación externa.



(b) Posición angular x_1 y la referencia con la presencia de perturbación externa.

Figura 1: Respuesta del lazo cerrado con PSMC $\{F, H, K, B\} = \{10, 0,5, 1000, 2\}$.

En la Figura 1(a) se muestra el efecto de la perturbación externa sobre la posición angular x_1 y debido a esto el controlador PSMC no garantiza la convergencia hacia la referencia. Por otro lado, en la Fig. 1(b) se puede observar que los efectos de la perturbación son atenuados en la dinámica de lazo cerrado.

6. Conclusiones

Una descripción del PSMC activo ante rechazo de perturbación ha sido realizada mediante el diseño de un observador difuso de estado extendido. Mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov se demuestra que las trayectorias de los errores de estimación están acotadas uniformemente en t bajo los criterios de sintonía propuestos. Las simulaciones numéricas demuestran la efectividad del observador propuesto y, por lo tanto, el mejoramiento del desempeño del lazo cerrado bajo el PSMC.

Agradecimientos

Este manuscrito fue apoyado por el Tecnológico Nacional de México (clave del proyecto: 17660.23-P) y desarrollado en el marco de trabajo del grupo de investigación ITTIJ-CA-10: “Sistemas dinámicos no lineales”.

Referencias

- Aschemann, H. and Schindele, D. (2008). Sliding-mode control of a high-speed linear axis driven by pneumatic muscle actuators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(11):3855–3864.
- Cao, Y., Huang, J., Huang, Z., Tu, X., and Mohammed, S. (2019). Optimizing control of passive gait training exoskeleton driven by pneumatic muscles using switch-mode firefly algorithm. *Robotica*, 37(12):2087–2103.
- Guo, B.-Z. and Zhao, Z.-l. (2011). On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty. *Systems & Control Letters*, 60(6):420–430.
- Huang, M., Huang, X., Tu, X., Li, Z., and Wen, Y. (2016). An online gain tuning proxy-based sliding mode control using neural network for a gait training robotic orthosis. *Cluster Computing*, 19:1987–2000.
- Kashiri, N., Lee, J., Tsagarakis, N. G., Van Damme, M., Vanderborght, B., and Caldwell, D. G. (2016). Proxy-based position control of manipulators with passive compliant actuators: Stability analysis and experiments. *Robotics and Autonomous Systems*, 75:398–408.
- Kikuuwe, R. (2018). Some stability proofs on proxy-based sliding mode control. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 35(4):1319–1341.
- Kikuuwe, R. (2021). Sliding motion accuracy of proxy-based sliding mode control subjected to measurement noise and disturbance. *European Journal of Control*, 58:114–122.
- Kikuuwe, R., Prieto, P. J., and López-Rentería, J.-A. (2021). Chattering of proxy-based sliding mode control in the presence of parasitic dynamics. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 38(1):177–191.
- Kikuuwe, R., Yasukouchi, S., Fujimoto, H., and Yamamoto, M. (2010). Proxy-based sliding mode control: A safer extension of pid position control. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(4):670–683.
- Mojallal, A. and Lotfifard, S. (2017). Improving during and postfault response of fuel cells in symmetrical and asymmetrical grid fault cases. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 9(3):1407–1418.
- Naghdi, M. and Sadrnia, M. A. (2020). A novel fuzzy extended state observer. *ISA transactions*, 102:1–11.
- Prieto, P. J., Rubio, E., Hernández, L., and Urquijo, O. (2013). Proxy-based sliding mode control on platform of 3 degree of freedom (3-dof). *Advanced Robotics*, 27(10):773–784.
- Prieto-Entenza, P. J., Cazarez-Castro, N. R., Aguilar, L. T., Cardenas-Maciel, S. L., and Lopez-Renteria, J. A. (2019). A lyapunov analysis for mamdani type fuzzy-based sliding mode control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(8):1887–1895.
- Sun, L., Zhao, W., Yin, W., Sun, N., and Liu, J. (2019). Proxy based position control for flexible joint robot with link side energy feedback. *Robotics and Autonomous Systems*, 121:103272.
- Van Damme, M., Vanderborght, B., Verrelst, B., Van Ham, R., Daerden, F., and Lefeber, D. (2009). Proxy-based sliding mode control of a planar pneumatic manipulator. *The International Journal of Robotics Research*, 28(2):266–284.
- Yan, B., Tian, Z., Shi, S., and Weng, Z. (2008). Fault diagnosis for a class of nonlinear systems via eso. *ISA transactions*, 47(4):386–394.
- Yu, W. (2018). Luenberger observer design for uncertainty nonlinear systems. *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory: In Honor of Alexander S. Poznyak*, pages 25–42.
- Zhao, W., Song, A., and Cao, Y. (2019). An extended proxy-based sliding mode control of pneumatic muscle actuators. *Applied Sciences*, 9(8):1571.